УДК 539.3

ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ВИДЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КОШИ–РИМАНА

А.А. Светашков, А.В. Махов

Томский политехнический университет
E-mail: alex@aurigma.com, astrodep@niipmm.tsu.ru

Использованы соотношения между собственными векторами системы уравнений плоской задачи теории упругости в перемещениях. Получена новая формулировка краевой задачи теории упругости в случае заданных на границе напряжений в виде задачи Дирихле для уравнений равновесия в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка – системы Коши-Римана.

Введение

Классическая постановка плоской задачи теории упругости, как известно [1, 2], включает в себя уравнения равновесия в перемещениях или в напряжениях (Лямэ и Бельтрами-Мичелла), представляющих собой системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, плюс соответствующие граничные условия. Между тем хорошо известна другая формулировка системы уравнений равновесия, которая в отличие от систем

дифференциальных уравнений Лямэ и Бельтрами-Мичелла, имеет первый порядок. В отсутствие объёмных сил данная система записывается как:

$$\frac{1+\lambda}{2} d_1\theta = \lambda d_2\omega,$$
$$\frac{1+\lambda}{2} d_2\theta = -\lambda d_1\omega. \qquad (1)$$

Здесь x,y – декартовы координаты; $d_\alpha, \alpha=1,2$ – сокращённая запись операций дифференцирования

$$d_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x},\ d_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\theta = d_1 u + d_2 v,\ \omega = \frac{1}{2}(d_1 v - d_2 u),$$

$u=u(x,y), v=v(x,y)$ – компоненты вектора перемещений, $\lambda=1-2\nu$, где ν – коэффициент Пуассона. Очевидно, что для функций $z_\alpha(x,y), \alpha=1,2$:

$$z_1 = \frac{1+\lambda}{2}\theta,\ z_2 = \lambda\omega$$

система (1) есть система уравнений Коши-Римана относительно двух гармонически-сопряжённых функций [3].

Однако формулировка уравнений равновесия плоской задачи теории упругости в виде системы (1) практически не используется в упругих расчётах, поскольку не известны граничные условия для функций $\theta(x,y), \omega(x,y)$, входящих в (1), а также не известны выражения компонент тензора напряжений и вектора перемещений через указанные функции.

Математический аппарат определения собственных значений и собственных векторов матрицы системы дифференциальных уравнений равновесия плоской задачи теории упругости в перемещениях, предложенный в [4], позволяет восполнить данный пробел.

1. Следствия из соотношений для собственных векторов плоской задачи теории упругости

Согласно [4], собственные векторы $\overline{\varphi}(\varphi_1,\varphi_2)$ и $\overline{\psi}(\psi_1,\psi_2)$ плоской задачи удовлетворяют уравнениям

$$d_1\varphi_1 + d_2\varphi_2 = C_1,$$
$$d_1\psi_2 - d_2\psi_1 = C_2. \qquad (2)$$

Здесь C_α – некоторые константы. С учётом связи компонент $\overline{\varphi}, \overline{\psi}$ и компонент вектора $\overline{y}(y_1,y_2)$, удовлетворяющего уравнению Лапласа,

$$y_\alpha = \lambda\varphi_\alpha + (1+\lambda)\psi_\alpha,\ \alpha = 1,2,$$

и разложения вектора перемещений по собственным векторам

$$u = \varphi_1 + \psi_1, v = \varphi_2 + \psi_2$$

получаем, что

$$\psi_1 = y_1 - \lambda u,\ \psi_2 = y_2 - \lambda v,$$
$$\varphi_1 = (1+\lambda)u - y_1,\ \varphi_2 = (1+\lambda)v - y_2. \qquad (3)$$

Тогда систему (2) можно переписать:

$$d_1 y_1 + d_2 y_2 = (1+\lambda)\theta - C_1,$$
$$d_1 y_2 - d_2 y_1 = \lambda(d_1 v - d_2 u) + C_2 = 2\lambda\omega + C_2. \qquad (4)$$

Из соотношений для собственных векторов плоской задачи теории упругости в форме (2–4) вытекают некоторые важные для дальнейших рассуждений следствия.

Следствие 1. Напряжения равны первым производным от компонент собственного вектора $\overline{\psi}(\psi_1,\psi_2)$.

Для доказательства запишем соотношения закона Гука в виде зависимостей напряжений от первых производных перемещений. Предварительно, для удобства выкладок, умножим компоненты тензора напряжений и компоненты внешних нагрузок на множитель λ/G, где G – модуль сдвига, т.е. будем использовать $\sigma'_x=\sigma_x\lambda/G$, $\sigma'_y=\sigma_y\lambda/G$, $\tau'_{xy}=\tau_{xy}\lambda/G$. В дальнейшем штрихи отбросим, тогда

$$\sigma_x = \theta + \lambda(d_1 u - d_2 v),$$
$$\sigma_y = \theta - \lambda(d_1 u - d_2 v),$$
$$\tau_{xy} = \lambda(d_1 v + d_2 u). \qquad (5)$$

С учётом (4) получим:

$$\sigma_x = d_1 y_1 + d_2 y_2 - 2\lambda d_2 v + C_1,$$
$$\sigma_y = d_1 y_1 + d_2 y_2 - 2\lambda d_1 u + C_1,$$
$$\tau_{xy} = 2\lambda d_2 u + d_1 y_2 - d_2 y_1 - C_2 =$$
$$= 2\lambda d_1 v + d_2 y_1 - d_1 y_2 + C_2. \qquad (6)$$

В силу гармоничности y_α, выполняются соотношения

$$d_1 y_1 = d_2 y_2 + N_1,$$
$$d_2 y_1 = -d_1 y_2 + N_2,$$

где N_1, N_2 – константы интегрирования.

Подставляя последние соотношения в (6), получим с учётом (3) искомое утверждение

$$\sigma_x = 2d_2(y_2 - \lambda v) + C_1 = 2d_2\psi_2 + C_1,$$
$$\sigma_y = 2d_1(y_1 - \lambda u) + C_1 = 2d_1\psi_1 + C_1,$$
$$\tau_{xy} = -2d_2(y_1 - \lambda u) - C_2 = -2d_1(y_2 - \lambda v) + C_2 =$$
$$= -2d_2\psi_1 - C_2 = -2d_1\psi_2 + C_2. \qquad (7)$$

Заметим, что подстановка (7) в уравнения равновесия в напряжениях обращает последние в тождества.

Следствие 2. Компоненты вектора $\overline{\psi}$ на границе равны контурным интегралам от внешних нагрузок.

Рассмотрим граничные условия в напряжениях, которые, как известно, имеют вид:

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = X_n,$$
$$\sigma_y m + \tau_{xy} l = Y_n.$$

Здесь X_n, Y_n – заданные граничные нагрузки, l, m – косинусы углов, которые образует внешняя нормаль к граничному контуру с осями x, y:

$$l = \cos(n, x) = \frac{dy}{ds},$$
$$m = \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}. \qquad (8)$$

Подставим в уравнения граничных условий соотношения (7), тогда:

$$2(ld_2 - md_1)\psi_2 + C_1 l + C_2 m = X_n,$$
$$2(md_1 - ld_2)\psi_1 + C_1 m - C_2 l = Y_n.$$

Оператор, стоящий в круглых скобках, есть производная по дуге s

$$\frac{d}{ds} \equiv ld_2 - md_1,$$

поэтому
$$2\frac{d\psi_2}{ds} = X_n - (C_1 l + C_2 m),$$
$$-2\frac{d\psi_1}{ds} = Y_n - C_1 m + C_2 l.$$

Отсюда, интегрируя по дуге s, находим:

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\int_N^M (X_n - C_1 l - C_2 m)ds + A,$$
$$\psi_1 = \frac{1}{2}\int_N^M (-Y_n + C_1 m - C_2 l)ds + B.$$

Здесь N, M – произвольные точки на контуре, A, B – константы.

Подставляя в (7), получим:

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial y}\int_N^M (X_n - C_1 l - C_2 m)ds + C_1,$$
$$\sigma_y = \frac{\partial}{\partial y}\int_N^M (-Y_n + C_1 m - C_2 l)ds + C_1,$$
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial}{\partial y}\int_N^M (-Y_n + C_1 m - C_2 l)ds - C_2 =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\int_N^M (X_n - C_1 l - C_2 m)ds + C_2.$$

Два аналитических выражения для касательного напряжения тождественны при любых C_1, C_2. Для доказательства достаточно использовать равенство

$$\int \mathrm{div}\overline{F}_n ds \equiv \int\left(\frac{\partial X_n}{\partial x} + \frac{\partial Y_n}{\partial y}\right)ds = 0,$$

где $\overline{F}_n = \overline{F}_n(X_n, Y_n)$ – вектор поверхностной нагрузки.

С учётом соотношений (8) граничные значения напряжений преобразуются к виду:

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial y}\int_N^M X_n ds,$$
$$\sigma_y = -\frac{\partial}{\partial x}\int_N^M Y_n ds,$$
$$\tau_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\int_N^M Y_n ds = -\frac{\partial}{\partial x}\int_N^M X_n ds. \qquad (9)$$

Легко убедиться, что подстановка (9) в уравнения равновесия в напряжениях

$$d_1\sigma_x + d_2\tau_{xy} = 0,$$
$$d_2\sigma_y + d_1\tau_{xy} = 0.$$

обращает последние в тождества.

Таким образом, граничные значения напряжений зависят только от внешних нагрузок.

2. Выражения собственных векторов через перемещения

Найдём решение системы (4), переписав её с учётом (3) в виде:

$$d_1\psi_1 + d_2\psi_2 = \theta - C_1,$$
$$d_1\psi_2 - d_2\psi_1 = C_2. \qquad (10)$$

Используем

$$d_1 y_1 = d_2 y_2 = \frac{1+\lambda}{2}\theta - \frac{C_1}{2}. \qquad (11)$$

Тогда решение (10) в форме Лява [1] будет иметь вид:

$$\psi_1 = \frac{1}{1+\lambda}d_1(xy_1) - (x+y)\frac{C_1 + C_2}{2},$$
$$\psi_2 = \frac{1}{1+\lambda}d_2(xy_1) + (x+y)\frac{C_2 - C_1}{2}. \qquad (12)$$

Учитывая (3) получаем:

$$\lambda u = y_1 - \frac{1}{1+\lambda}d_1(xy_1) + (x+y)\frac{C_1 + C_2}{2},$$
$$\lambda v = y_2 - \frac{1}{1+\lambda}d_2(xy_1) - (x+y)\frac{C_2 - C_1}{2}. \qquad (13)$$

Таким образом, перемещения u,v выражаются через гармонические функции y_α посредством (13).

3. Граничные условия для системы уравнений равновесия

Первое граничное условие для функции следует из закона Гука в форме (6). Имеем:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2C_1 + 2(d_1 y_1 + d_2 y_2) - 2\lambda(d_1 u + d_2 v). \qquad (14)$$

Учитывая (4), получаем:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2C_1 + 2(1+\lambda)\theta - 2C_1 - 2\lambda\theta = 2\theta. \qquad (15)$$

Следовательно,

$$\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y).$$

Или, принимая во внимание (9)

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int_N^M X_n ds - \frac{\partial}{\partial x}\int_N^M Y_n ds\right). \qquad (16)$$

Для определения второго граничного условия воспользуемся (4)

$$d_1 y_2 - d_2 y_1 = 2\lambda\omega + C_2.$$

В силу гармоничности y_α выполняется

$$d_2 y_1 = -d_1 y_2 - N_2.$$

Тогда получим

$$-d_1 y_2 = d_2 y_1 + N_2 = -\lambda\omega + \frac{N_2 - C_2}{2}. \qquad (17)$$

Далее выразим τ_{xy} через ω, используя соотношение

$$\tau_{xy} = -2d_1\psi_2 + C_2.$$

С учётом (12) находим

$$d_1\psi_2 = \frac{1}{1+\lambda} d_1 d_2 (xy_1) + \frac{C_2 - C_1}{2}.$$

Тогда

$$\tau_{xy} = -\frac{2}{1+\lambda} d_1 d_2 (xy_1) - (C_2 - C_1) + C_2 =$$

$$= -\frac{2}{1+\lambda} d_1 d_2 (xy_1) + C_1.$$

Выразим последнее соотношение через ω посредством (17). Имеем

$$d_1 d_2 (xy_1) = d_1 (x d_2 y_1),$$

$$d_2 y_1 = -\lambda\omega - N_2 + \frac{N_2 - C_2}{2} = -\lambda\omega - \frac{N_2 + C_2}{2}.$$

Следовательно,

$$d_1 d_2 (xy_1) = d_1 \left[-x\left(\lambda\omega + \frac{N_2 + C_2}{2} \right) \right] =$$

$$= -\lambda d_1 (x\omega) - \frac{C_2 + N_2}{2}.$$

Окончательно получаем для τ_{xy}

$$\tau_{xy} = \frac{2\lambda}{1+\lambda} d_1 (x\omega) + C_1 + \frac{N_2 + C_2}{1+\lambda}. \qquad (18)$$

Рассмотрим

$$d_1 (x\omega) = \omega + x d_1 \omega = \omega - \frac{1+\lambda}{2\lambda} x d_2 \theta. \qquad (19)$$

Здесь учтено одно из уравнений системы (1). Сопоставляя (18 и 19), находим:

$$d_1 (x\omega) = \frac{1+\lambda}{2\lambda}\tau_{xy} - \frac{1+\lambda}{2\lambda} C_1 - \frac{N_2 + C_2}{2\lambda} = \omega - \frac{1+\lambda}{2\lambda} x d_2 \theta.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{1+\lambda}{2\lambda}(\tau_{xy} + x d_2 \theta) + \frac{1+\lambda}{2\lambda} C_1 + \frac{N_2 + C_2}{2\lambda}.$$

Используя (9), получаем выражение для $\omega = \omega(x,y)$ на границе:

$$\omega = \frac{1+\lambda}{2\lambda}\left[x\left(\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\displaystyle\int_N^M X_n ds - \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\displaystyle\int_N^M Y_n ds \end{array} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\int_N^M Y_n ds \right] +$$

$$+\frac{1+\lambda}{2\lambda} C_1 + \frac{N_2 + C_2}{2\lambda}. \qquad (20)$$

Заметим, что (20) можно переписать в другой форме, если использовать соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int X_n ds + \frac{\partial}{\partial y}\int Y_n ds = 0.$$

Таким образом, функции θ, ω, удовлетворяющие в области системе уравнений (1), на границе полностью определяются через заданные нагрузки согласно (16, 20). Таким образом, для системы (1) краевая задача относительно θ, ω есть задача Дирихле.

4. Определение компонент напряжённо-деформированного состояния

По найденным из решения краевой задачи, определяемой (1, 16 и 20), функциям θ, ω необходимо рассчитать компоненты напряжений и перемещений. Сначала найдём выражения функций y_α через θ, ω. Для этого используем (11 и 17). Имеем:

$$d_1 y_1 = \frac{1+\lambda}{2}\theta, \; d_2 y_1 = -\lambda\omega.$$

Следовательно,

$$y_1 = \frac{1+\lambda}{2}\int \theta dx - \lambda \int \omega dy. \qquad (21)$$

Аналогичным образом получаем:

$$y_2 = \frac{1+\lambda}{2}\int \theta dy + \lambda \int \omega dx. \qquad (22)$$

Интегралы в (21, 22) не зависят от пути интегрирования в силу условий Коши-Римана в виде системы (1).

Для определения перемещений используем (11, 12 и 17). Тогда получим:

$$\lambda u = \frac{\lambda}{1+\lambda} y_1 - \frac{1}{2} x\theta + \frac{C_1 + C_2}{2}(x + y),$$

$$\lambda v = y_2 + \frac{\lambda}{1+\lambda} x\omega - \frac{C_2 - C_1}{2}(x + y). \qquad (23)$$

Для перемещений в форме (23) выполняются уравнения равновесия Лямэ.

Напряжения определим из закона Гука в форме (6), учитывая (11, 17 и 18):

$$\sigma_x = -\frac{2\lambda}{1+\lambda} x d_2 \omega + C_2 = -x d_1 \theta + C_2,$$

$$\sigma_y = 2\theta + x d_1 \theta - \lambda C_1 - C_2,$$

$$\tau_{xy} = \frac{2\lambda}{1+\lambda} d_1 (x\omega) + C_1 + \frac{N_1 + C_2}{1+\lambda}. \qquad (24)$$

Найденные напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия в напряжениях, в чём можно убедиться дифференцированием выражений (24) с учётом связи первых производных от θ, ω посредством системы уравнений равновесия (1).

Таким образом, все компоненты напряжённо-деформированного состояния выражены через θ, ω. Задача решена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 674 с.
2. Лейбензон Л.С. Краткий курс теории упругости. – М.-Л.: ОГИЗ ГТТЛ, 1942. – 304 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. – 716 с.
4. Светашков А.А. Собственные преобразования системы уравнений теории упругости // Известия вузов. Физика. – 2004. – № 10. – С. 98–101.

УДК 622.24.05